

О ЛУЧИСТОМ РАВНОВЕСИИ ПЛАНЕТАРНОЙ ТУМАННОСТИ*

Прекрасными работами Хаббла, Боуэна и Занстра проблема происхождения свечения и спектров туманностей была решена, по крайней мере, качественно. Кэрролл и Силлие сделали попытку вычислить относительные интенсивности линий Бальмеровской серии водорода в спектрах туманностей, начиная, таким образом, наступление на важную проблему интерпретации современных спектрофотометрических данных. Однако динамика туманностей, так же как и природа и происхождение сил, в них действующих, остаются неясными. В настоящее время едва ли возможно ответить на эти вопросы и построить законченную теорию планетарных туманностей. Наблюдения контуров небулярных линий, а также точные наблюдения движения материи в туманностях позволят, несомненно, ускорить развитие теории в будущем.

Современное состояние проблемы позволяет, однако, решить одну ее часть, а именно задачу о силах, действующих в туманности. Действительно, мы увидим, что избирательное давление излучения, обусловленное специфическими условиями в туманностях, играет весьма важную роль в них. Может быть давление излучения в этом случае больше, чем любая другая сила. Поэтому вычисление давления излучения является вопросом, представляющим значительный интерес. Это вычисление может быть выполнено на основе анализа поля излучения. Этот анализ может быть произведен приближенно, без решения других задач, связанных с планетарными туманностями. Целью настоящей статьи является исследование лучистого равновесия планетарных туманностей. Мы сосредоточиваем наше внимание на планетарных туманностях, хотя многие результаты могут быть применены к диффузным туманностям, а также к газовым оболочкам, окружающим некоторые звезды с эмиссионными линиями в спектрах (Р Лебеда и др.).

Примененный здесь метод был предложен автором в более ранней статье [1]. Мы повторим часть этой предварительной работы, что-

* On the Radiative Equilibrium of a Planetary Nebula. Изв. Пулк. обс., **13**, № 114, 1, 1933.

бы сделать дальнейшее ее развитие доступным для читателей, знакомых с вышеуказанной статьей, и ввести некоторые модификации.

Часть I. Лучистое равновесие нерасширяющейся водородной туманности

Ниже мы рассмотрим планетарную туманность, состоящую только из водорода. Имеются некоторые наблюдательные данные, указывающие на расширение планетарных туманностей. Благодаря Доплеровскому смещению частоты спектральной линии различны в различных частях туманности. Это обстоятельство вводит значительное изменение в тип лучистого равновесия.

Но в некоторых случаях скорость расширения, несомненно, настолько мала, что различия в частотах линий между различными частями туманности меньше, чем Доплеровское расширение линии, обусловленное тепловым движением атомов. Поведение таких туманностей подобно поведению нерасширяющейся туманности, если мы ограничиваемся рассмотрением поля излучения и его взаимодействия с материей туманности. Во второй части мы рассмотрим лучистое равновесие расширяющейся планетарной туманности.

Согласно теории свечения туманностей, развитой Занстра, все или, по крайней мере, значительная часть квантов, испускаемых центральной звездой и имеющих частоты, превышающие ν_0 (частота границы серии Лаймана), поглощаются в туманности водородными атомами. Это обстоятельство требует, чтобы оптическая толща туманности τ_1 для этих частот была бы больше единицы или, по крайней мере, не во много раз меньше единицы.

Следуя ходу аргументации Занстра, мы здесь покажем, что для каждого поглощаемого кванта, имеющего частоту больше ν_0 , имеется определенная вероятность переизлучения p в той же частоте и вероятность $1-p$ переизлучения в линии L_α (первая линия серии Лаймана водорода). Ради простоты мы назовем излучение за границей серии Лаймана кратко „ультрафиолетовым излучением“, а соответствующие кванты — „ультрафиолетовыми квантами“.

Мы рассмотрим различные превращения ультрафиолетового кванта, испускаемого с поверхности центральной звезды. Он будет поглощаться небулярной оболочкой, а поглощение будет сопровождаться ионизацией одного атома водорода. После некоторого времени свободный электрон снова захватывается протоном. При этом захвате имеются две возможности: I. электрон попадает непосредственно на самый нижний уровень $1S$ (первый уровень) и II. электрон попадает

на один из возбужденных уровней. В первом случае излучается один новый ультрафиолетовый квант и восстанавливается первоначальное состояние. Во втором случае электрон совершает некоторую цепь переходов, последним звеном которой будет переход на первый уровень. Разрежение (диллюция) излучения настолько велико, а плотность вещества настолько низка, что разрыв этой цепи переходов весьма мало вероятен. Последний переход в нормальное состояние сопровождается излучением одного кванта серии Лаймана. Имеются снова две возможности: (а) Излучается один L_α -квант. Однако теория Занстра требует, чтобы оптическая толща туманности в ультрафиолете была, по крайней мере, порядка единицы. Но коэффициент поглощения в линиях серии Лаймана в несколько тысяч раз больше, чем за границей этой серии. Излученный L_α -квант поэтому будет поглощен атомом водорода, находящимся в нормальном состоянии. Этот атом перейдет на второй уровень и затем, благодаря отсутствию внешних возмущений в течение его короткой жизни, возвратится на первый уровень, испуская снова один L_α -квант. Таким образом, L_α -квант остается неизменным, и мы можем сказать, что он претерпевает только процессы рассеяния. Эти процессы могут повториться много раз, до тех пор, пока квант не достигнет внешней границы туманности и не вылетит. (б) Излучается один квант какой-нибудь другой линии серии Лаймана. Для простоты мы предположим, что это L_β -квант. В этой линии оптическая толща туманности также очень велика, и испущенный квант будет поглощен. Это поглощение сопровождается переходом атома с первого уровня на третий. На третьем уровне атом имеет две возможности: он либо совершает переход типа $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, излучая последовательно кванты H_α и L_α , либо он непосредственно переходит на первый уровень, излучая снова L_β . В первом случае конечным результатом является один L_α -квант. Его дальнейшая судьба описана выше. Во втором случае L_β -квант будет поглощен, и, таким образом, существует конечная вероятность возникновения L_α -кванта. После многочисленных поглощений и переизлучений вероятность выживания одного L_β -кванта будет очень мала, а вероятность возникновения одного L_α -кванта будет практически равна единице.

Таким образом, в обоих случаях (а) и (б) конечным результатом является L_α -квант. Легко видеть, что наше рассмотрение можно распространить на случаи, когда переходы сопровождаются вместо излучения одного L_β -кванта излучением одного L_γ , L_δ и прочих квантов. Пусть p является вероятностью случая I и $1-p$ — вероятностью случая II.

Таким образом, мы в самом деле видим, что после поглощения одного ультрафиолетового кванта имеется вероятность p переизлуче-

ния его с той же длиной волны* и вероятность $1-p$ излучения L_α -кванта. Мы не будем принимать во внимание промежуточные стадии, в которых поглощенный квант может появиться как L_β , L_γ и прочие кванты. Это окажет малое влияние на наши результаты. Кванты L_α не могут претерпевать новых превращений и могут только рассеиваться.

Проблема, таким образом, сводится к изучению двух наложенных полей излучения: поля ультрафиолетовых квантов и поля L_α -излучения в планетарных туманностях. Мы рассмотрим сперва поле ультрафиолетовых квантов.

Поле ультрафиолетовых квантов. В этой статье мы воспользуемся методом приведения сферической проблемы к плоской проблеме, развитым профессором Милном. Пусть k будет коэффициент поглощения ультрафиолетового излучения на атом. Этот коэффициент зависит от длины волны. Мы возьмем его среднее значение. Пусть, далее, n число H -атомов на первом уровне в 1 см^3 , r_1 и r_2 расстояния внутренней и внешней границ небулярного кольца от центральной звезды. Тогда оптическая глубина на расстоянии r от центральной звезды равна

$$\tau = \int_r^{r_2} nkdr. \quad (1.1)$$

Уравнения переноса энергии ультрафиолетовых квантов могут быть написаны согласно Милну в виде

$$\frac{1}{2} \frac{dI(\tau)}{d\tau} = I(\tau) - B(\tau), \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dI'(\tau)}{d\tau} = B(\tau) - I'(\tau), \quad (1.3)$$

если использовать приближение типа Шварцшильда-Шустера.

Здесь $I(\tau)$ средняя интенсивность диффузного ультрафиолетового излучения туманности, направленного наружу в точке τ , а $I'(\tau)$ — средняя интенсивность того же излучения в той же точке, направленного внутрь туманности. Величина $4\pi B(\tau) d\tau$ есть количество энергии ультрафиолетовых квантов, испускаемых в слое $d\tau$ за секунду. Тот

* Благодаря свободно-свободным переходам, так же как и неупругим столкновениям свободного электрона, длина волны переизлученного кванта может значительно отличаться от длины волны поглощенного кванта. Однако она всегда остается короче $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$, где c — скорость света. Но в этой статье мы не делаем различия между ультрафиолетовыми квантами различных длин волн.

же слой поглощает диффузное ультрафиолетовое излучение из различных частей небулярного кольца. Поглощаемая энергия равна $2\pi [I(\tau) + I'(\tau)] d\tau$. Кроме этого, слой поглощает излучение центральной звезды. Пусть πS будет количество ультрафиолетовой энергии звезды, падающей на каждый квадратный сантиметр внутренней поверхности туманности. В точке τ это количество уменьшается до $\pi S e^{-(\tau_1 - \tau)}$, где

$$\tau_1 = \int_{r_1}^{r_2} n k dr \quad (1.4)$$

оптическая толщина туманности. Из этого количества наш слой поглощает

$$\pi S e^{-(\tau_1 - \tau)} d\tau.$$

Так как из поглощенных квантов только доля p переизлучается снова как ультрафиолетовые кванты, то уравнение лучистого равновесия может быть написано в виде:

$$p \left[I(\tau) + I'(\tau) + \frac{1}{2} S e^{-(\tau_1 - \tau)} \right] = 2B(\tau). \quad (1.5)$$

Вводя граничные условия [2]

$$I'(0) = 0, \quad I(\tau_1) = I'(\tau_1), \quad (1.6)$$

мы принимаем в расчет диффузное излучение, падающее на любую часть внутренней границы небулярной оболочки и достигающее из других частей внутренней границы.

Из уравнений (1.2) и (1.3) имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{d(I + I')}{d\tau} = I - I', \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(I - I')}{d\tau} = I + I' - 2B. \quad (1.8)$$

Дифференцируя (1.7) и сравнивая с (1.8), получаем:

$$\frac{1}{4} \frac{d^2(I + I')}{d\tau^2} = I + I' - 2B. \quad (1.9)$$

Вводя (1.5) в (1.9), мы находим следующее уравнение для $I + I'$:

$$\frac{1}{4} \frac{d^2(I + I')}{d\tau^2} = (1 - p)(I + I') - \frac{p}{2} S e^{-(\tau_1 - \tau)}. \quad (1.10)$$

Общее решение этого уравнения есть

$$I + I' = Ae^{-\lambda\tau} + Be^{\lambda\tau} + \frac{2p}{3-4p} Se^{-(\tau_1-\tau)}, \quad (1.11)$$

где A и B являются постоянными интегрирования, а $\lambda = 2\sqrt{1-p}$.

Из (1.11) и (1.5) мы находим:

$$B(\tau) = \frac{p}{2} \left(Ae^{-\lambda\tau} + Be^{\lambda\tau} + \frac{3}{2(3-4p)} Se^{-(\tau_1-\tau)} \right). \quad (1.12)$$

Вводя (1.11) в (1.7), получаем:

$$I(\tau) - I'(\tau) = -\frac{\lambda}{2} Ae^{-\lambda\tau} + \frac{\lambda}{2} Be^{\lambda\tau} + \frac{p}{3-4p} Se^{-(\tau_1-\tau)}. \quad (1.13)$$

Складывая и вычитая (1.11) и (1.13), мы находим $I(\tau)$ и $I'(\tau)$.

$$I(\tau) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) Ae^{-\lambda\tau} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) Be^{\lambda\tau} + \frac{3p}{2(3-4p)} Se^{-(\tau_1-\tau)}. \quad (1.14)$$

$$I'(\tau) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) Ae^{-\lambda\tau} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) Be^{\lambda\tau} + \frac{p}{2(3-4p)} Se^{-(\tau_1-\tau)}. \quad (1.15)$$

Первое из условий (1.6), согласно (1.15), может быть написано в виде:

$$A \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) + B \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) + \frac{p}{3-4p} Se^{-\tau_1} = 0. \quad (1.16)$$

Второе из условий (1.6) даст:

$$\lambda Be^{\lambda\tau_1} + \frac{2pS}{3-4p} = \lambda Ae^{-\lambda\tau_1}. \quad (1.17)$$

Из уравнений (1.16) и (1.17) находим следующие выражения для коэффициентов A и B :

$$A = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) e^{\tau_1} - \frac{\lambda}{2} e^{\lambda\tau_1}}{\frac{\lambda}{2} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) e^{-\lambda\tau_1} + \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) e^{\lambda\tau_1} \right]} \frac{p}{3-4p} Se^{-\tau_1}, \quad (1.18)$$

$$B = \frac{\left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) e^{\tau_1} + \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda\tau_1}}{\frac{\lambda}{2} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) e^{-\lambda\tau_1} + \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) e^{\lambda\tau_1} \right]} \frac{p}{3-4p} Se^{-\tau_1}. \quad (1.19)$$

Эти значения A и B , введенные в (1.12), (1.14) и (1.15), определяют поле ультрафиолетовых квантов.

Для результирующего потока диффузного ультрафиолетового излучения на внешней границе туманности мы получаем:

$$\begin{aligned} \pi F_u &= \pi [I(0) - I'(0)] = \\ &= \pi \left\{ 1 - \frac{2e^{\tau_1} - \lambda \operatorname{sh} \lambda \tau_1}{\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) e^{-\lambda \tau_1} + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) e^{\lambda \tau_1}} \right\} \frac{p}{3 - 4p} S e^{-\tau_1}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Для нахождения решения в численном виде необходимо знать p и τ_1 . Величина p должна быть вычислена из чистой физики. Силлие [3] вычислил относительные вероятности захвата электронов протонами на различные уровни водорода. Из его результатов мы вывели долю захваченных электронов, которые непосредственно переходят из свободного состояния на первый уровень, переизлучая ультрафиолетовые кванты. Эта доля есть наше p . Величина p зависит от температуры свободных электронов. Для различных температур мы имеем:

T	10.000°	20.000°	50.000
p	0,46	0,49	0,57

Подставляя $p = 0,5$, мы получаем следующее асимптотическое выражение для результирующего потока на внешней границе при больших значениях τ_1 ($\tau_1 > 3$):

$$\pi F_u = 0,7 \pi S e^{-\tau_1}.$$

Результирующий поток прямого ультрафиолетового излучения звезды будет просто $\pi S e^{-\tau_1}$, а весь результирующий поток равен $1,7 \pi S e^{-\tau_1}$.

При отсутствии поглощающей оболочки результирующий поток от звезды равен πS . Его $1 - 1,7e^{-\tau_1}$ доля превращается в другие формы излучения. Благодаря тому факту, что путем расщепления ультрафиолетового кванта непременно создается один L_α -квант, поток в линии L_α на внешней границе будет содержать $\frac{1 - 1,7e^{-\tau_1}}{h\nu_c} L_\alpha$ -квантов, где ν_c — средняя частота ультрафиолетовых квантов. Если τ_1 велико, благодаря малости экспоненциального множителя мы можем сказать, что поток L_α энергии на внешней границе туманности приблизительно равен $\frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \pi S$. Здесь ν_α — частота линии L_α .

Поле L_α -излучения. Для исследования поля L_α -излучения мы введем коэффициент поглощения χ в линии L_α на один водородный

атом в нормальном состоянии. Оптическая глубина для этой линии определяется формулой

$$t = \int_r^{r_2} n \kappa dr. \quad (1.21)$$

Отношение $\frac{\kappa}{k} = \omega$ можно принять постоянным, если пренебречь изменением температуры в пределах туманности. В самом деле, κ является функцией только атомных постоянных и Допплеровской ширины линии. Эта ширина зависит от температуры. Когда $\frac{\kappa}{k} = \omega$ постоянно, отношение $\frac{t}{\tau}$ также постоянно и мы имеем:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{\kappa}{k} = \omega. \quad (1.22)$$

Если температура туманности порядка 10^3 — 10^4 градусов, величина ω будет также порядка 10^3 — 10^4 . Так как мы предполагали, что оптическая толща τ_1 туманности в ультрафиолетовой области порядка единицы и больше, то оптическая толща в линии L_α

$$t_1 = \int_{r_1}^{r_2} n \kappa dr$$

будет порядка 10^3 — 10^4 или больше.

Уравнения переноса излучения в линии L_α имеют тот же вид, что (1.2) и (1.3). Пусть $K(t)$ будет средняя интенсивность диффузного L_α -излучения туманности, направленного наружу в точке t , а $K'(t)$ —средняя интенсивность того же излучения, в той же точке направленного внутрь туманности. В качестве уравнений переноса имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{dK(t)}{dt} = K(t) - C(t), \quad (1.23)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dK'(t)}{dt} = C(t) - K'(t), \quad (1.24)$$

где $4\pi C(t) dt$ — количество энергии, испускаемой слоем dt в линии L_α за 1 секунду.

Этот слой поглощает диффузное L_α -излучение из других частей туманности. Количество поглощаемого диффузного излучения есть $2\pi [K(t) + K'(t)] dt$. Число L_α -квантов, испускаемых центральной звездой, незначительно, так как число ультрафиолетовых квантов, превращаемых в L_α -кванты, в несколько тысяч раз больше.

Число ультрафиолетовых квантов, которые поглощаются в слое dt и превращаются в L_α -кванты, равно:

$$\frac{(1-p) [2\pi (I + I') + \pi S e^{-(\tau_1 - \tau)}] d\tau}{h\nu_c}$$

Таким образом, энергия L_α -излучения, создаваемого в dt , согласно (1.5), есть:

$$\frac{(1-p)}{p} \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} 4\pi B(\tau) d\tau = \frac{1-p}{p} \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} 4\pi B(\tau) \frac{dt}{\omega},$$

так как энергия каждого L_α -кванта есть $h\nu_\alpha$. Следовательно, уравнение лучистого равновесия имеет вид:

$$4\pi C(t) dt = 2\pi [K(t) + K'(t)] dt + 4\pi \frac{1-p}{p} \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} B(\tau) \frac{dt}{\omega}$$

или

$$C(t) = \frac{1}{2} [K(t) + K'(t)] + \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \frac{1-p}{p\omega} B(\tau). \quad (1.25)$$

Граничные условия следующие:

$$K'(0) = 0; \quad K'(t_1) = K(t_1). \quad (1.26)$$

Из уравнений (1.23) и (1.24) мы имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{d(K + K')}{dt} = K - K', \quad (1.27)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(K - K')}{dt} = K + K' - 2C(t). \quad (1.28)$$

Дифференцируя (1.27) и вводя (1.28), находим:

$$\frac{1}{4} \frac{d^2(K + K')}{dt^2} = K + K' - 2C(t) \quad (1.29)$$

или, согласно (1.25),

$$\frac{1}{4} \frac{d^2(K + K')}{dt^2} = -\frac{2\nu_\alpha}{\nu_c} \frac{1-p}{p\omega} B(\tau). \quad (1.30)$$

Написав $B(\tau)$ в виде

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{P}{2} (Ae^{-\lambda\tau} + Be^{\lambda\tau} + De^{-(\tau_1 - \tau)}) = \\ &= \frac{P}{2} (Ae^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + Be^{\frac{\lambda}{\omega}t} + De^{-\frac{t_1 - t}{\omega}}), \end{aligned} \quad (1.31)$$

где

$$D = \frac{3}{2(3-4p)} S, \quad (1.32)$$

мы находим следующее решение уравнения (1.30):

$$K(t) + K'(t) = a + bt - \frac{4\nu_a}{\nu_c} \frac{1-p}{\lambda^2} \omega \left(Ae^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + Be^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda^2 e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right),$$

где a и b — постоянные интегрирования.

Дифференцируя это выражение, на основании (1.27) находим:

$$K(t) - K'(t) = \frac{b}{2} - \frac{2\nu_a}{\nu_c} \frac{1-p}{\lambda} \left(-Ae^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + Be^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right).$$

По определению

$$\lambda = 2\sqrt{1-p}.$$

Поэтому

$$K(t) + K'(t) = a + bt - \frac{\nu_a}{\nu_c} \omega \left(Ae^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + Be^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda^2 e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right), \quad (1.33)$$

$$K(t) - K'(t) = \frac{b}{2} - \frac{\nu_a}{\nu_c} \frac{\lambda}{2} \left(-Ae^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + Be^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right). \quad (1.34)$$

Из (1.33) и (1.34) мы имеем:

$$K(t) = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{b}{2}t - \frac{\nu_a}{2\nu_c} \omega \left[A \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + B \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda^2 \left(1 + \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right], \quad (1.35)$$

$$K'(t) = \frac{a}{2} - \frac{b}{4} + \frac{b}{2}t - \frac{\nu_a}{2\nu_c} \omega \left[A \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + B \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right]. \quad (1.36)$$

Первое из условий (1.26) приводится к

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{4} - \frac{\nu_a}{2\nu_c} \omega \left[A \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) + B \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) + 4D(1-p) \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1}{\omega}} \right] = 0, \quad (1.37)$$

а второе

$$b = \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \left[-\lambda A e^{-\lambda\tau_1} + \lambda B e^{\lambda\tau_1} + 4D(1-p) \right]. \quad (1.38)$$

Вводя (1.38) в (1.37), находим:

$$a = \frac{\nu_\alpha}{2\nu_c} \left[-\lambda A e^{-\lambda\tau_1} + \lambda B e^{\lambda\tau_1} + 4D(1-p) \right] + \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \omega \left[A \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) + B \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) + 4D(1-p) \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1}{\omega}} \right]. \quad (1.39)$$

Уравнения (1.35) и (1.36) вместе с (1.38) и (1.39) определяют поле L_* -излучения.

Плотность излучения во внутренних слоях туманности. Выше мы через πS обозначили количество энергии ультрафиолетового излучения, падающего от звезды на каждый квадратный сантиметр внутренней поверхности туманности. При отсутствии переизлучения средняя интенсивность ультрафиолетового излучения в этой области будет равна $\frac{\pi S}{4\pi} = 0.25 S$. В случае, когда переизлучение принимается в расчет, средняя интенсивность ультрафиолетового излучения возрастает и становится равной $\frac{1}{4} S + \frac{1}{2} (I_1 + I_2)$. Согласно (1.11), (1.18) и (1.19),

$$I(\tau_1) + I'(\tau_1) = \frac{2p}{3-4p} S \left[1 - \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda e^{-\tau_1} + \lambda \operatorname{ch} \lambda\tau_1 + 2\operatorname{sh} \lambda\tau_1}{2 \operatorname{ch} \lambda\tau_1 + \lambda \operatorname{sh} \lambda\tau_1} \right]. \quad (1.40)$$

Выражение, заключенное в скобки, изменяется между 0 и $1 - \frac{1}{\lambda}$, если τ_1 изменяется между 0 и ∞ . Поэтому мы имеем:

$$\frac{1}{4} S \leq \frac{1}{4} S + \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \leq \frac{1}{4} S + \frac{2p \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)}{3-4p} S.$$

Подставляя $p = \frac{1}{2}$, получаем:

$$\frac{1}{4} S \leq \frac{1}{4} S + \frac{1}{2} (I_1 + I_2) < 0,40 S.$$

Таким образом, средняя интенсивность ультрафиолетового излучения на внутренней границе туманности того же порядка величины, как при отсутствии небулярной оболочки, и должна удвоиться, если τ_1 очень велико.

Положение совершенно меняется, когда мы рассматриваем поле L_α -излучения. Благодаря большой оптической толщине туманности в линии L_α и тому факту, что все поглощаемые L_α -кванты переизлучаются в той же частоте, плотность L_α -излучения во внутренних слоях оболочки очень большая.

Чтобы оценить эту плотность, мы сделаем некоторые преобразования в (1.38) и (1.39). Сравнивая (1.38) с (1.17) и (1.32), мы находим:

$$b = \frac{2\nu_\alpha}{\nu_c} S \quad (1.41)$$

и, пренебрегая в (1.39) членами, не содержащими множителя ω ,

$$a = \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \omega [A + B + 4D(1-p)e^{-\tau_1}]. \quad (1.42)$$

Вводя величины A , B и D , получаем:

$$a = \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \omega \left[3(1-p)e^{-\tau_1} - \frac{1 + e^{-\tau_1} \operatorname{ch} \lambda \tau_1}{2 \operatorname{ch} \lambda \tau_1 + \lambda \operatorname{sh} \lambda \tau_1} \right] \frac{2p}{3-4p} S. \quad (1.43)$$

Для выражения в скобках в (1.33) мы имеем:

$$Ae^{-\lambda \tau_1} + Be^{\lambda \tau_1} + D\lambda^2 = \frac{S}{3-4p} \left[6(1-p) - \frac{2p}{\lambda} \frac{\lambda e^{-\tau_1} + \lambda \operatorname{ch} \lambda \tau_1 + 2 \operatorname{sh} \lambda \tau_1}{2 \operatorname{ch} \lambda \tau_1 + \lambda \operatorname{sh} \lambda \tau_1} \right]. \quad (1.44)$$

Это выражение изменяется в следующих пределах:

$$2S \leq Ae^{-\lambda \tau_1} + Be^{\lambda \tau_1} + D\lambda^2 < \frac{S}{3-4p} \left[6(1-p) - \frac{2p}{\lambda} \right]$$

или, если $p = 0,5$,

$$2S \leq Ae^{-\lambda \tau_1} + Be^{\lambda \tau_1} + D\lambda^2 \leq 2,29S$$

и в первом приближении

$$Ae^{-\lambda \tau_1} + Be^{\lambda \tau_1} + D\lambda^2 = 2,15S. \quad (1.45)$$

Для средней интенсивности L_α -излучения на внутренней границе мы получаем приближенно

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [K(t_1) + K'(t_1)] &= \frac{\nu_\alpha}{2\nu_c} \omega S f(\tau_1) + \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \omega S \tau_1 - \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} 1,07 \omega S = \\ &= \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \omega S \left[\tau_1 + \frac{1}{2} f(\tau_1) - 1,07 \right], \end{aligned}$$

где

$$f(\tau_1) = \left[3(1-p)e^{-\tau_1} - \frac{1 + e^{-\tau_1} \operatorname{ch} \lambda \tau_1}{2 \operatorname{ch} \lambda \tau_1 + \lambda \operatorname{sh} \lambda \tau_1} \right].$$

Если $\tau \geq 2$, мы можем пренебречь $\frac{1}{2} f(\tau_1)$ и приближенно имеем:

$$\frac{1}{2} [K(t_1) + K'(t_1)] = \frac{\nu_a}{\nu_c} \omega S [\tau_1 - 1].$$

Мы можем принять $\omega = 10\,000$ [1]. Поэтому если $\tau_1 = 2$, то средняя плотность L_α -излучения на внутренней границе будет порядка $10\,000 S$, где πS снова энергия всего ультрафиолетового излучения, падающего на каждый квадратный сантиметр внутренней поверхности туманности от центральной звезды. Следовательно, плотность L_α -излучения в этом примере в $40\,000$ раз больше, чем плотность всего разреженного ультрафиолетового излучения ядра при отсутствии поглощающей оболочки на том же расстоянии. Грубая оценка показывает, что ультрафиолетовое излучение черного тела при температурах порядка $40\,000$ — $50\,000^\circ$ почти в $5 \cdot 10^4$ раза сильнее, чем то же излучение в пределах Доплеровской ширины линии L_α , соответствующей температуре небулярной материи. Таким образом, плотность L_α -излучения во внутренних слоях небулярной оболочки будет в

$$40\,000 \times 5 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^9$$

раза больше, чем плотность прямого L_α -излучения центральной звезды в пределах Доплеровской ширины линии.

Такая большая плотность L_α -излучения должна производить большое накопление атомов в состоянии $2P$. С другой стороны, будет иметь место также большое накопление водородных атомов в метастабильном состоянии $2S$. Может оказаться поэтому, что оптическая толщина туманности в линиях Бальмеровской серии не очень мала.

Давление излучения во внешних частях туманности. Большая часть ультрафиолетового излучения звезды превращается туманностью в L_α -кванты. Поэтому поток излучения, испускаемый туманностью, будет состоять, главным образом, из L_α -квантов. Для достаточно большого τ_1 каждый ультрафиолетовый квант дает начало одному L_α -кванту, а поток L_α -излучения от туманности будет порядка $\frac{\nu_a}{\nu_c} \pi S$. На внутренней поверхности туманности поток L_α -излучения

будет практически равен нулю, а поток ультрафиолетового излучения будет πS . Давление излучения в слое газа пропорционально коэффициенту поглощения. На внутренней поверхности туманности поток излучения состоит из ультрафиолетовых квантов, для которых коэффициент поглощения мал. Поэтому давление излучения не будет очень большим. На внешних частях туманности, наоборот, поток излучения состоит, главным образом, из L_α -квантов, а коэффициент по-

глощения почти в 10^4 раз больше, чем в случае ультрафиолетовых квантов, в то время как поток излучения того же порядка. Давление излучения или, более точно, градиент давления излучения будет здесь в 10^4 раз больше, чем на внутренней границе оболочки. Физически ясно, что для больших τ_1 результирующий поток L_α -излучения πF_α во внешнем слое оболочки будет определяться формулой

$$\pi F_\alpha = \left(\frac{r_*}{r_n} \right)^2 \frac{2\pi h\nu_\alpha}{c^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

где r_* и r_n соответственно радиус центральной звезды и радиус туманности. Средний импульс, получаемый водородным атомом в нормальном состоянии в секунду от L_α -квантов, будет

$$\frac{\pi F_\alpha}{c} = \left(\frac{r_*}{r_n} \right)^2 \frac{2\pi h\nu_\alpha}{c^3} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Импульс, получаемый каждым водородным атомом от гравитационного поля центральной звезды в секунду, есть

$$g \left(\frac{r_*}{r_n} \right)^2 m,$$

где g —гравитационное ускорение на поверхности центральной звезды. Однако не только нормальные водородные атомы, но и протоны подвержены гравитационной силе. Поэтому отношение μ отталкивающей силы R к силе притяжения G дается формулой

$$\mu = \frac{R}{G} = \frac{\pi}{mg \left(1 + \frac{n^+}{n_1} \right)} \frac{2h\nu_\alpha}{c^3} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

где $\frac{n^+}{n_1}$ —отношение числа протонов в кубическом сантиметре к числу нормальных водородных атомов в том же объеме. Даже в случае, когда мы подставляем

$$\frac{n^+}{n} = 500,$$

что вероятно слишком высокая величина [4], мы получаем для $T = 40.000^\circ$

$$\mu = \frac{10^{10}}{g}.$$

Значение g для ядер планетарных туманностей будет значительно больше, чем для Солнца. Однако невероятно, чтобы оно могло достигнуть $10^{10} \text{ см.сек}^{-2}$. Следовательно, мы можем заключить, что когда оптическая толща туманности в ультрафиолетовой области не чрезвычайно мала, давление излучения будет преобладающим фактором во внешних частях туманности.

Часть II. Лучистое равновесие расширяющейся водородной туманности

В некоторых случаях скорость расширения туманности, несомненно, больше, чем скорости внутренних молекулярных движений, и хорошо устанавливается спектроскопическими наблюдениями, так же как и по прямым фотографиям (Крабовидная туманность, туманности, окружающие Новые). Поэтому заслуживает внимания рассмотрение лучистого равновесия в таких случаях.

До обращения к этой проблеме мы покажем, что водородная туманность не может быть в состоянии механического равновесия и иметь в то же время максимум яркости на ограниченном расстоянии от центральной звезды. Наше доказательство является новым аргументом в пользу мнения о том, что планетарные туманности находятся в состоянии постоянного движения.

Невозможность механического равновесия планетарной туманности. В первой части было показано, что из числа ультрафиолетовых квантов, поглощаемых в данном объеме, некоторая доля p переизлучается в тех же частотах, а остальная доля $1-p$ превращается в L_α -кванты. Превращения в противоположном направлении столь редки, что ими можно пренебречь. Следовательно, существует строгое монохроматическое лучистое равновесие в линии L_α при некоторых „источниках“ L_α -квантов, распределенных по туманности. „Сила“ этих „источников“ в данном объеме равна доле $1-p$, умноженной на число ультрафиолетовых квантов, поглощаемых в том же объеме. Распределение источников может быть определено из анализа поля ультрафиолетовых квантов. Этот анализ выполнен в первой части работы для случая, когда линейная толща туманности мала по сравнению с ее радиусом. Но для рассмотрения возможных конфигураций.

механического равновесия такое ограничение является неправильным. Поэтому мы обратимся к общему случаю.

Пусть ρ_u есть плотность всего ультрафиолетового излучения (диффузное + прямое). Ясно, что количество ультрафиолетовой энергии, поглощаемой в единице объема, есть

$$n_1 c k \rho_u,$$

где n_1 — число нормальных водородных атомов в этом объеме. Из этого количества доля

$$\frac{\nu_a}{\nu_c} (1 - p) n_1 c k \rho_u$$

будет перенесена в линию L_α .

Принимая сферическую симметрию туманности, мы можем количество L_α -энергии, генерируемой в пределах сферы радиуса r , написать в виде

$$4\pi f(t) = 4\pi \frac{\nu_a}{\nu_c} (1 - p) c k \int_0^r \rho_u r^2 dr, \quad (2.1)$$

где t — оптическая глубина на расстоянии r от центральной звезды. Так как правая часть (2.1) монотонно возрастающая функция от r , мы имеем $f'(t) < 0$, ибо t убывает с возрастанием r .

Поток L_α -энергии через 1 см^2 поверхности нашей сферы будет

$$H = \frac{f(t)}{r^2}. \quad (2.2)$$

Уравнение механического равновесия может быть написано в виде:

$$\frac{dp}{dr} = -g\rho + \frac{\nu H n}{c}. \quad (2.3)$$

Если пренебречь гравитационным действием самой туманности и рассмотреть только притяжение к ядру, мы будем иметь

$$g = \frac{fM}{r^2}.$$

Величины ρ и p могут быть написаны в виде:

$$\rho = (n^+ + n_1) m; \quad p = (2n^+ + n_1) kT, \quad (2.4)$$

так как полное число частиц в единице объема равно $2n^+ + n_1$. Известно, что в туманности n_1 мало по сравнению с n^+ . Поэтому:

$$\rho = n^+ m; \quad p = 2n^+ kT \quad (2.5)$$

и (2.3) приводит к

$$2kT \frac{dn^+}{dr} = -\frac{fMmn^+}{r^2} + \frac{\chi f(t) n_1}{cr^2}$$

или

$$f(t) = \frac{c}{\chi} \frac{r^2}{n_1} \left[2kT \frac{dn^+}{dr} + \frac{fMmn^+}{r^2} \right]. \quad (2.6)$$

Согласно формуле ионизации для разреженного излучения,

$$\frac{n^{+2}}{n} = \frac{C}{r^2}, \quad (2.7)$$

где C —постоянная, зависящая от температуры и радиуса центральной звезды туманности.

Вводя (2.7) в (2.6), мы находим:

$$f(t) = \frac{cC}{\chi} \cdot \frac{1}{n^{+2}} \left[2kT \frac{dn^+}{dr} + \frac{fMm}{r^2} n^+ \right],$$

или дифференцируя:

$$-f'(t) \chi n = \frac{cC}{\chi} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{n^{+2}} \left[2kT \frac{dn^+}{dr} + \frac{fMm}{r^2} n^+ \right] \right\}.$$

Вводя снова (2.7), имеем:

$$-f'(t) \frac{r^2 n^{+2}}{C} \chi = \frac{cC}{\chi} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{n^{+2}} \left[2kT \frac{dn^+}{dr} + \frac{fMm}{r^2} n^+ \right] \right\}.$$

Если

$$v = \frac{1}{n^+},$$

$$-f'(t) \frac{r^2}{v^2} = \frac{cC^2}{\chi^2} \frac{d}{dr} \left[-2kT \frac{dv}{dr} + \frac{fMm}{r^2} v \right] \quad (2.8)$$

или

$$2kT \frac{d^2v}{dr^2} = \frac{\chi^2}{cC^2} f'(t) \frac{r^2}{v^2} + \frac{fMm}{r^2} \frac{dv}{dr} - \frac{2fMmv}{r^3}.$$

Легко видеть, что n^+ не имеет максимума. В самом деле, необходимым условием для такого максимума является существование минимума v , и мы будем иметь:

$$\frac{dv}{dr} = 0.$$

Благодаря неравенству $f'(t) < 0$ и положительности числовых постоянных, мы находим

$$\frac{d^2v}{dr^2} < 0,$$

что несовместимо с необходимыми условиями минимума v . Отсюда вытекает, что равновесная конфигурация с максимумом n^+ на конечном расстоянии от ядра невозможна.

Однако число рекомбинаций в 1 см^3 пропорционально n^{+2} . Поэтому интенсивность водородного излучения (в линиях серии Бальмера) также пропорциональна n^{+2} . Мы показали, что n^{+2} не имеет максимума на конечном расстоянии в случае механического равновесия. Но максимум излучения на ограниченном расстоянии является наблюдательным фактом. Мы можем сделать вывод, что наблюдаемые планетарные туманности не могут быть в состоянии механического равновесия*.

Вышеприведенное доказательство является новым аргументом в пользу гипотезы о расширении планетарных туманностей и, возможно, сходного происхождения планетарных туманностей и газовых оболочек, окружающих Новые.

Поле ультрафиолетовых квантов. Различия в частотах, вызываемые эффектом Допплера, связанным с расширением туманности, весьма малы по сравнению с шириной ультрафиолетовой области. Ими можно пренебречь. Поэтому поле ультрафиолетовых квантов в этом случае будет таким же, как и в случае нерасширяющейся туманности. И мы воспользуемся решением для этого случая.

Поле L_α -квантов. Мы рассмотрим предельный случай, когда скорость расширения v значительно больше средней скорости молекулярных движений. Для наблюдателя, расположенного вне туманности на фиксированном расстоянии от ядра, частота линии L_α , испускаемой атомами, летящими прямо к наблюдателю, будет:

$$\nu_\alpha \left(1 - \frac{v}{c} \right),$$

а частота, испускаемая атомами, летящими в противоположном направлении, будет:

$$\nu_\alpha \left(1 + \frac{v}{c} \right).$$

Таким образом, грубо говоря, небулярная материя прозрачна для L_α -излучения, идущего сзади. Но каждый атом способен поглощать излучение соседних атомов. Тип лучистого равновесия почти

* При этом доказательстве автор считал возможным пренебречь влиянием электромагнитных полей. Поэтому правильнее установленную теорему формулировать следующим образом: при действии одних лишь сил притяжения, светового давления и газового давления равновесная планетарная туманность не может иметь максимум плотности на конечном расстоянии от центра. *Ред.*

тот же, что в случае оболочки, состоящей из плоско-параллельных слоев, когда свечение, идущее сзади, не принимается в расчет. Нам кажется, что наши результаты будут качественно правильны, если мы рассмотрим такую простую модель.

Вместо (1.26) мы имеем следующие граничные условия:

$$k'(0) = 0; \quad k(t_1) = 0. \quad (2.9)$$

Для интенсивности излучения имеем соответственно (1.35) и (1.36):

$$k(t) = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{b}{2}t - \frac{\nu_a}{2\nu_c} \omega \left[A \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + B \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda^2 \left(1 + \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right], \quad (2.10)$$

$$k'(t) = \frac{a}{2} - \frac{b}{4} + \frac{b}{2}t - \frac{\nu_a}{2\nu_c} \omega \left[A \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + B \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right]. \quad (2.11)$$

Сравнивая с (2.9), мы в этом случае находим:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} - \frac{b}{4} - \frac{\nu_a}{2\nu_c} \omega \left[A \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) + B \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) + D\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1}{\omega}} \right] &= 0, \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{b}{2}t_1 - \frac{\nu_a}{2\nu_c} \omega \left[A \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{-\lambda\tau_1} + B \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{\lambda\tau_1} + \right. \\ \left. + D\lambda^2 \left(1 + \frac{1}{2\omega} \right) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений получаем:

$$\begin{aligned} b(1+t_1) &= \frac{\nu_a}{\nu_c} \omega \left\{ A \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{-\lambda\tau_1} - \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) \right] + \right. \\ &+ B \left[\left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{\lambda\tau_1} - \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) \right] + D\lambda^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2\omega} \right) - \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1}{\omega}} \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Так как $t_1 = \omega\tau_1$ очень велико по сравнению с единицей,

$$\begin{aligned} b &= \frac{\nu_a}{\nu_c\tau_1} \left\{ A \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{-\lambda\tau_1} - \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) \right] + B \left[\left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{\lambda\tau_1} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) \right] + D\lambda^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2\omega} \right) - \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1}{\omega}} \right] \right\}. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Для a мы имеем:

$$a = \frac{b}{2} + \frac{\nu_a}{\nu_c} \omega \left[A \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) + B \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) + D\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1}{\omega}} \right]$$

или, пренебрегая членами, не содержащими ω ,

$$a = \frac{\nu_a}{\nu_c} \omega \left[A + B + D\lambda^2 e^{-\frac{t_1}{\omega}} \right], \quad (2.13)$$

что тождественно с (1.42).

В том же приближении мы можем написать:

$$b = \frac{\nu_a}{\nu_c \tau_1} \{ B (e^{\lambda \tau_1} - 1) - A (1 - e^{-\lambda \tau_1}) + D\lambda^2 (1 - e^{-\tau_1}) \}. \quad (2.14)$$

Вводя в (1.34), находим:

$$\begin{aligned} k(t) - k'(t) &= \frac{\nu_a}{2\nu_c \tau_1} \{ B (e^{\lambda \tau_1} - 1) - A (1 - e^{-\lambda \tau_1}) + D\lambda^2 (1 - e^{-\tau_1}) \} - \\ &- \frac{\nu_a}{\nu_c} \frac{\lambda}{2} (B e^{\lambda \tau} - A e^{-\lambda \tau} + D\lambda e^{-(\tau_1 - \tau)}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Теперь мы имеем все необходимое для вычисления давления излучения в туманности.

Давление излучения в туманности. Мы рассмотрим два предельных случая.

Случай I. Оптическая толщина туманности в ультрафиолетовом свете τ_1 очень мала.

В этом случае

$$\begin{aligned} \pi F_x &= \pi [k(t) - k'(t)] = \\ &= \frac{\nu_a}{\nu_c} \frac{\lambda^2}{4} \pi S \left(\frac{\tau_1}{2} - \tau \right) = \frac{\nu_a}{\nu_c} (1 - p) \pi S \left(\frac{\tau_1}{2} - \tau \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Мы видим, что в этом случае средний импульс, получаемый каждым водородным атомом на внешней границе туманности, равен

$$\frac{x\pi F_x(0)}{c \left(1 + \frac{n^+}{n} \right)} = \frac{x \frac{\nu_a}{\nu_c} (1 - p) \pi S \tau_1}{2c \left(1 + \frac{n^+}{n} \right)} \quad (2.17)$$

и направлен наружу от центральной звезды.

На внутренней границе туманности средний импульс, получаемый от излучения, имеет ту же величину (возможно с другим $\frac{n^+}{n}$) и на-

правлен к центральной звезде. В середине туманности при $\tau = \frac{\tau_1}{2}$ результирующий поток исчезает. Согласно (1.27) мы здесь имеем максимум плотности L_α -излучения, в то время как в нерасширяющейся туманности максимум этой плотности был на внутренней границе.

Случай II. Пусть τ_1 будет очень велико. В этом случае мы можем приближенно написать:

$$k(t) - k'(t) = \frac{\nu_\alpha}{2\nu_c \tau_1} \{Be^{\lambda\tau_1} - A + D\lambda^2\} - \\ - \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \frac{\lambda}{2} \{Be^{\lambda\tau} - Ae^{-\lambda\tau} + D\lambda e^{-(\tau_1-\tau)}\}.$$

На внутренней границе туманности имеем:

$$k(t_1) - k'(t_1) = \frac{\nu_\alpha}{2\nu_c \tau_1} \{Be^{\lambda\tau_1} - A + D\lambda^2\} - \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \frac{\lambda}{2} \{Be^{\lambda\tau_1} - Ae^{-\lambda\tau_1} + D\lambda\}.$$

Благодаря присутствию множителя $\frac{1}{\tau_1}$ мы можем пренебречь первыми скобками и получаем:*

$$k(t_1) - k'(t_1) = -\frac{\nu_\alpha}{\nu_c} S.$$

Физически ясно, что сумма числовых значений выходящего потока на внешней границе и направленного к звезде потока на внутренней границе будет равна $\pi \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} S$, так как все ультрафиолетовые кванты благодаря большой величине τ_1 превращаются в L_α -кванты. Мы можем сделать вывод, что выходящий поток на внешней границе практически равен нулю.

В этом случае влияние давления излучения во внешних слоях туманности очень мало. Но внутренние слои претерпевают очень большое торможение. Не входя в обсуждение деталей рассматриваемого вопроса, мы видим, что алгебраическая разница между результирующими потоками на внешней и внутренней границах туманности в обоих случаях порядка $\pi \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} S$, так же как в случае нерасширяющейся туманности. Это обстоятельство будет вызывать диссипацию туманности, и если в скоростях расширения различных слоев туманности не имеется дисперсии, то такая дисперсия появится под действием давления излучения после некоторого промежутка времени.

* Принимая во внимание (1.17). *Ред.*

В настоящее время обычно принимается, что планетарные туманности формируются в результате некоторого рода катаклизмов, подобных вспышке Новой. На первый взгляд может показаться, что наш метод анализа для поля излучения дает возможность вычислить давление излучения для каждой стадии истории туманности и таким путем нарисовать всю картину развития туманности.

Такой вывод будет неправильным, так как для начальной стадии вспышки условия весьма отличны от условий в планетарных туманностях, и наша теория неприменима. С другой стороны, на этих начальных стадиях сила тяжести, так же как и давление излучения, имеют максимальные значения. Поэтому, хотя эта начальная стадия вероятно не очень продолжительная (возможно порядка нескольких дней), ее влияние на дальнейшую историю будет очень большим. Однако с момента, когда условия возбуждения становятся сходными с обычными условиями в планетарных туманностях, наш метод может применяться.

Часть III. Гелиевая туманность

В случае водорода, благодаря тому факту, что спектроскопические термы, соответствующие данному главному квантовому числу, совпадают, можно рассматривать только два поля излучения, играющих существенную роль. В случае более сложных атомов, когда спектроскопические термы с одинаковым главным квантовым числом, но с различными l (азимутальное квантовое число), не совпадают, положение дел более сложное и, одновременно, более интересное. Мы рассмотрим здесь туманность, состоящую из атомов He , так как He один из наиболее важных компонентов газовых туманностей.

Рассмотрим атом He . Под влиянием излучения с частотами, лежащими за границей главной серии паргелия ($1^1S - n^1P$), этот атом может ионизоваться. Атом He^+ , возникающий после такой ионизации, может рекомбинировать с одним из свободных электронов. Немедленно после рекомбинации атом может оказаться либо в состоянии, принадлежащем системе термов паргелия, либо на одном из уровней ортогелия. Так как дальнейшие переходы могут происходить только в данной системе уровней (интеркомбинации—запрещены), мы каждый из этих случаев рассмотрим отдельно.

Паргелий. Как в случае водорода, здесь имеются две возможности: I—электрон непосредственно падает на самый нижний уровень 1^1S и II—электрон попадает на один из возбужденных уровней. В первом случае испускается один ультрафиолетовый квант и восстанавливается первоначальное состояние. Во втором случае электрон совер-

шает снова цепь переходов, последним звеном которой будет переход на первый уровень $1S$. Такой переход „разрешается“ только с уровнем n^1P , где n главное квантовое число. Переходы с уровнем с другими азимутальными квантовыми числами являются „запрещенными“. И они в действительности будут сравнительно редкими. Например, атомы, находящиеся в состоянии 3^1D , будут переходить в состояния 2^1P или 3^1P , так как вероятности перехода в эти состояния во много тысяч раз больше вероятности непосредственного перехода в 1^1S . Единственное исключение составляет состояние 2^1S . В самом деле, единственным энергетически возможным спонтанным переходом из этого состояния является переход $2^1S \rightarrow 1^1S$. И электроны, которые захватываются на этот уровень, останутся в нем до тех пор, пока они не перейдут в состояние 1^1S . Другими словами, состояние 2^1S является метастабильным, и будет иметь место большое накопление атомов в нем, настолько большое, что число переходов $2^1S \rightarrow 1^1S$ будет сравнимо с числом других „разрешенных“ переходов.

Таким образом, атом может попасть в состояние 1^1S только из состояний n^1P или 2^1S . Мы рассмотрим, что произойдет в каждом случае.

а) В случае переходов $2^1S - 1^1S$ атом испускает два кванта* с частотами ν_1 и ν_2 , которые ограничены только условием

$$h(\nu_2 + \nu_1) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1,$$

где ε_2 и ε_1 энергии атома в состояниях 2^1S и 1^1S соответственно. Непрерывный спектр, излучаемый таким образом, свободно пройдет через туманность и не может снова служить для возбуждения состояния 2^1S , так как соответствующая вероятность одновременного поглощения двух квантов очень мала.

б) В случае перехода типа $n^1P \rightarrow 1^1S$ будет испускаться один квант главной серии гелия. Но туманность имеет очень большую оптическую толщину в линиях этой серии. Этот квант, поэтому, будет поглощен немедленно после излучения. Рассмотрим дальнейшую судьбу этого кванта, например, в случае перехода $3^1P \rightarrow 1^1S$. Будучи поглощенным, соответствующий квант возбудит нормальный атом гелия в состояние 3^1P . Из состояния 3^1P разрешаются различные спонтанные переходы. Если происходит переход $3^1P \rightarrow 1^1S$, то восстанавливается прежнее состояние дел. Но в случае перехода $3^1P \rightarrow 2^1S$ соответствующий квант резкой серии, как и последующее излучение, сопровождают

* Переход $2^1S \rightarrow 1^1S$ не может сопровождаться излучением только одного кванта $h\nu = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Излучение двух квантов является необходимым условием такого перехода. Этим замечанием я обязан Л. Ландау.

мое переходом $2^1S \rightarrow 1^1S$, свободно пройдет через туманность. Наконец, в случае $3^1P \rightarrow 3^1S$ единственным возможным следующим шагом является переход $3^1S \rightarrow 2^1P$. После многих поглощений и излучений вероятность выживания кванта $3^1P \rightarrow 1^1S$ будет практически равна нулю. Имеется некоторая вероятность p расщепления этого кванта: на квант $3^1P \rightarrow 2^1S$ и кванты, соответствующие запрещенному переходу $2^1S \rightarrow 1^1S$. В противном случае имеются две возможности: 1) из состояния 2^1P атом переходит в состояние 2^1S и затем в состояние 1^1S , испуская, таким образом, излучение, для которого туманность прозрачна; 2) атом испускает квант главной серии $2^1P \rightarrow 1^1S$. Этот квант будет снова поглощен и теперь снова возникнут две возможности. После большого числа поглощений и излучений вероятность выживания кванта $2^1P \rightarrow 1^1S$ будет также очень мала.

Таким образом, почти все кванты главной серии паргелия исчезнут в туманности и поток излучения в линиях этой серии будет очень мал на обеих границах (внешней и внутренней) небулярной оболочки.

Мы можем сделать вывод, что давление излучения, производимое излучением в линиях паргелия, чрезвычайно мало по сравнению с давлением излучения, действующего в случае водородных атомов.

Ортогелий. Атомы, попадающие вследствие рекомбинации на один из уровней системы ортогелия, переходят окончательно в метастабильное состояние 2^3S . Благодаря высокой степени метастабильности, концентрация атомов в этом состоянии будет очень большой. Оптическая толщина туманности в линиях главной серии $2^3S \rightarrow n^3P$ может стать большой. Например: если метастабильность настолько строгая, что принцип Больцмана

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}}$$

остается в силе [5] (здесь n_2 и n_1 числа атомов в состояниях 2^3S и 1^1S соответственно, а g_2 и g_1 — соответствующие веса), то оптическая толщина может быть порядка 50 для первых линий главной серии.

Роль линии L_α здесь играет линия $2^3S \rightarrow 2^3P$. В самом деле, каждый поглощаемый в этой линии квант будет испускаться в той же линии без изменения частоты. Роль линии L_β играет линия $2^3S \rightarrow 3^3P$. В самом деле, каждый квант $2^3S \rightarrow 3^3P$, поглощаясь, возбуждает состояние 3^3P . Для атома в этом состоянии имеется определенная вероятность p перехода в состояние 2^3S и вероятность $1-p$ перехода типа $3^3P \rightarrow 3^3S \rightarrow 2^3P \rightarrow 2^3S$ с излучением кванта $2^3S \rightarrow 2^3P$. Таким образом, после многих поглощений и переизлучений вероятность выжива-

ния кванта $2^3S - 3^3P$ будет мала, хотя не столь мала, как в случае линии L_β водорода, так как $t_1 = 50$ кажется верхним пределом оптической толщи туманности в первых линиях ортогелия и она может быть фактически в несколько раз меньше.

Мы сделаем некоторые вычисления, чтобы оценить результирующий поток излучения в этой линии как функцию соответствующей оптической толщи и относительных вероятностей переходов. Результат будет представлять некоторый интерес, так как линия $2^3S - 3^3P$, имеющая длину волны 3889А, хотя и блендируется со слабой линией Бальмеровской серии водорода, наблюдаема в спектрах туманностей.

Удобно предполагать, что ослабление соответствующего ультрафиолетового излучения нейтральными атомами гелия мало, то есть мы рассматриваем случай, когда оптическая толщина туманности для этого излучения мала.

Количество ультрафиолетовой энергии, поглощаемой в $d\tau$, будет равно

$$\pi S_u d\tau,$$

так как диффузное ультрафиолетовое излучение туманности, благодаря малой оптической толщине, мало по сравнению с πS_u . Количество энергии, „созданной“ в линии $2^3S - 3^3P$, будет:

$$\frac{\nu_0}{\nu_c} q \pi S_u d\tau,$$

где ν_0 — частота линии $2^3S - 3^3P$, а ν_c — средняя частота ультрафиолетового излучения, q — постоянный коэффициент, определяемый группой коэффициентов вероятности переходов для атомов *He*.

Вводя оптическую глубину в рассматриваемой линии $t = \omega\tau$, мы можем написать уравнение лучистого равновесия в виде:

$$C(t) = \frac{P}{2} [K(t) + K'(t)] + \frac{\nu_0}{\nu_c} q \frac{S_u}{4\omega}, \quad (3.1)$$

где $C(t)$, $K(t)$ и $K'(t)$ имеют тот же смысл, что раньше, но не для линии L_α , а для линии $2^3S - 3^3P$. Величина P определена выше.

Вводя

$$A = \frac{\nu_0}{\nu_c} q \frac{S_u}{4\omega}, \quad (3.2)$$

мы находим из уравнений переноса (1.23) и (1.24)

$$\frac{1}{4} \frac{d^2(K + K')}{dt^2} = (1 - P)(K + K') - 2A. \quad (3.3)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$K + K' = ae^{\lambda t} + be^{-\lambda t} - 4At^2, \quad (3.4)$$

где

$$\lambda = 2\sqrt{1-P}. \quad (3.5)$$

Благодаря соотношению

$$\frac{1}{2} \frac{d(K + K')}{dt} = K - K' \quad (3.6)$$

мы находим:

$$K - K' = \frac{a\lambda}{2} e^{\lambda t} - \frac{b\lambda}{2} e^{-\lambda t} - 4At. \quad (3.7)$$

Складывая и вычитая (3.4) и (3.7), получаем:

$$K = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) e^{\lambda t} + \frac{b}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) e^{-\lambda t} - 2At^2 - 2At, \quad (3.8)$$

$$K' = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) e^{\lambda t} + \frac{b}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) e^{-\lambda t} - 2At^2 + 2At. \quad (3.9)$$

Вводя граничные условия для случая нерасширяющейся туманности, мы находим следующие выражения для постоянных интегрирования:

$$a = A \frac{4t_1 \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)}{\lambda \left[\operatorname{ch} \lambda t_1 + \frac{\lambda}{2} \operatorname{sh} \lambda t_1 \right]}, \quad (3.10)$$

$$b = -A \frac{4t_1 \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)}{\lambda \left[\operatorname{ch} \lambda t_1 - \frac{\lambda}{2} \operatorname{sh} \lambda t_1 \right]}. \quad (3.11)$$

Для потока энергии в нашей линии мы получаем:

$$\pi F = \pi(K - K')_{t=0} = \frac{\pi a \lambda}{2} - \frac{\pi b \lambda}{2} = \frac{8\pi A t_1}{\operatorname{ch} \lambda t_1 + \frac{\lambda}{2} \operatorname{sh} \lambda t_1} \quad (3.12)$$

или

$$\pi F = \frac{2\pi\nu_0}{\nu_c} q S_u \tau_1 \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda t_1 + \frac{\lambda}{2} \operatorname{sh} \lambda t_1},$$

где τ_1 — оптическая толщина туманности в ультрафиолетовых частотах.

Для линий других серий (резкой и диффузной), для которых туманность совершенно прозрачна, мы будем иметь:

$$\pi F' = \frac{2\pi\nu'_0}{\nu_c} q' S_a \tau_1, \quad (3.13)$$

так как в этом случае $t_1 = 0$. Величины F' , ν' , q' имеют те же значения, что F , ν и q , однако относятся ко второй линии. Отношение

$$\frac{F}{F'} = \frac{\nu_0}{\nu'_0} \frac{q}{q'} \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda t_1 + \frac{\lambda}{2} \operatorname{sh} \lambda t_1} \quad (3.14)$$

результатирующих потоков в любой обычной линии и в линии $\lambda 3889$ зависит главным образом от λt_1 , так как $\nu_0 q$ будет того же порядка величины, что $\nu'_0 q'$.

Таким образом, из относительных интенсивностей $\lambda 3889$ и $\lambda 4026$ мы можем найти приближенную величину λt_1 . Величина λ должна быть получена из чистой физики, и мы можем определить приближенную величину t_1 .

В любом случае результирующий поток в линии $2^3S - 2^3P$ будет иметь значительную величину и импульс, получаемый атомами на уровне 2^3S , будет очень большим. Однако на каждый атом на уровне 2^3S приходится большое число атомов на уровне 1^1S . Поэтому среднее давление излучения, действующее на атомы гелия, будет мало по сравнению со средним давлением, испытываемым атомами водорода.

Таким образом, мы видим, что среди линий ортогелия, так же как и паргелия, нет ни одной линии, которая играет такую же важную роль (в смысле большой величины селективного давления излучения), как линия L_α водорода.

Такое различие между He и H должно было бы произвести разделение атомов этих элементов. Однако вспомним, что лишь малый процент атомов гелия находится в нейтральном состоянии. Значительно больше число атомов He^+ . Действие селективного давления излучения на эти ионы, конечно, более важно для теории планетарных туманностей.

Ионизованный гелий. Структура спектра He^+ подобна структуре спектра водорода. Поэтому для атомов He^+ вся картина процессов излучения будет существенно тождественной с картиной для водородных атомов. Правда, поток энергии в первой линии главной серии $He II$ будет в несколько сотен раз меньше, чем поток в линии L_α , так как атомы He^+ поглощают кванты с частотами в четыре раза больше частот квантов, поглощаемых водородными атомами, а в со-

ответствующей области спектра интенсивность излучения будет слабее, чем за пределом серии Лаймана. Однако малая величина потока излучения будет достаточно компенсироваться тем, что отношение $\frac{n^{++}}{n^+}$ для гелия будет мало по сравнению с отношением $\frac{n^+}{n}$ для атомов II. Благодаря этому импульс, получаемый каждым атомом He^+ , распределяется между меньшим числом свободных ядер (He^{++} — атомов), чем импульс, получаемый каждым водородным атомом.

Мы можем сделать вывод, что селективное давление излучения для гелия того же порядка величины, что и для водорода.

Весьма интересно, что для He^+ несомненно оптическая толща в соответствующей ультрафиолетовой области τ_1^+ велика по сравнению с единицей. В самом деле, согласно интерпретации Боуэна явления „слоистой эмиссии“, ультрафиолетовое излучение поглощается атомами He^+ во внутренних слоях наблюдаемой туманности. Поэтому, мы будем иметь $\tau_1^+ > 1$.

Интересно также, что τ_1^+ и оптическая толща туманности в области, соответствующей ионизации нейтральных атомов He , скажем τ_1 , связаны посредством простого соотношения.

Действительно, мы имеем:

$$d\tau = -kndr$$

для атомов He и

$$d\tau^+ = -k^+n^+dr$$

для атомов He^+ . Далее,

$$\frac{d\tau}{d\tau^+} = \frac{kn}{k^+n^+}. \quad (3.15)$$

Формула ионизации может быть написана в виде:

$$\frac{n^+}{n} = Ce^{-(\tau_1 - \tau)}, \quad (3.16)$$

если мы предположим, что электронная плотность и температура постоянны в туманности и кривизна слоев пренебрегается. Для $\tau = \tau_1$ мы имеем $\frac{n^+}{n} = C$. Мы получаем:

$$\frac{n^+}{n} = \left(\frac{n^+}{n} \right)_{\tau=\tau_1} e^{-(\tau_1 - \tau)}. \quad (3.17)$$

Сравнивая (3.15) с (3.17), мы находим:

$$\frac{d\tau}{d\tau^+} = \frac{k}{k^+} \left(\frac{n}{n^+} \right)_{\tau=\tau_1} e^{\tau_1 - \tau}.$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$e^{-\tau_1} [e^{\tau} - 1] = \frac{k}{k^+} \left(\frac{n}{n^+} \right)_{\tau=\tau_1} \tau^+. \quad (3.18)$$

Применим это уравнение к внутренней границе

$$\tau_1^+ = \frac{k^+}{k} \left(\frac{n^+}{n} \right)_{\tau=\tau_1} (1 - e^{-\tau_1}). \quad (3.19)$$

Мы приходим к выводу, что если наши предположения осуществляются, то существует верхний предел для оптической толщи туманности за пределом главной серии $He\ II$:

$$\tau_0^+ = \frac{k^+}{k} \left(\frac{n^+}{n} \right)_{\tau=\tau_1}. \quad (3.20)$$

Отношение $\frac{n^+}{n}$ при $\tau = \tau_1$, то есть на внутренней границе туманности, где ультрафиолетовое излучение звезды еще не ослаблено, может быть вычислено согласно обычной формуле ионизации для случая разреженного излучения.

Если мы берем пример, рассмотренный Занстра [4], мы получаем приблизительно

$$\frac{n^+}{n} = 30.$$

Если $k^+ = k$ (коэффициент поглощения для нейтрального гелия, к несчастью, неизвестен),

$$\tau_0^+ < 30.$$

Так как τ_1 будет порядка единицы или больше (как мы можем заключить из яркости He -изображений планетарных туманностей), то τ_0^+ будет фактически порядка 30 единиц.

Туманность, состоящая из водорода и гелия. Необходимо здесь заметить, что модель поля излучения в туманности, состоящей из атомов H и He одновременно, не может быть получена посредством простого наложения полей излучения для каждого рода атомов. В действительности имеет место взаимодействие между полями H и He .

Для кванта с частотой первой линии главной серии He^+ или паргелия имеется определенная вероятность поглощения водородными атомами. Результатом такого поглощения будет ионизация одного атома водорода. Энергия таким путем может переноситься из указанных линий в поле L_α . Правда, коэффициент поглощения для этих частот на

водородный атом в 10^5 раз меньше соответствующего коэффициента в случае He^+ или He -атомов соответственно, однако благодаря большой оптической толщине туманности в этих линиях, влияние рассматриваемых переходов будет заметным.

Противоположные переходы, как кажется, невозможны. Легко видеть, что влияние взаимодействия между полями излучения обоих родов атомов на строение поля L_α -квантов относительно мало и не может чувствительным образом изменить картину, представленную в I и II частях.

Заключение

Некоторые замечания о динамике планетарных туманностей. Существуют две возможные гипотезы о природе планетарных туманностей.

Мы можем предполагать, что распределение материи в туманности обладает стационарным характером и что материя, уходящая с границы туманности, компенсируется постоянным потоком от звезды*. Эта картина поддерживается тем фактом, что многие планетарные туманности имеют ядра со спектром Вольф-Райе. Такие спектры обычно объясняются непрерывным испусканием вещества из звезды со скоростями порядка 1000 км/сек . Материя, выброшенная таким образом из звезды, получает отрицательное ускорение, вызванное давлением излучения во внутренних слоях туманности, согласно нашей модели расширяющейся туманности. На больших расстояниях от звезды частицы получают положительное ускорение, и на расстоянии минимальной скорости мы будем иметь максимальную плотность.

Однако имеются многие туманности с ядрами типа абсорбционного O. Для таких туманностей более подходит другая гипотеза. Именно, мы предположим, что, благодаря некоторого рода катаклизму, определенная доля массы звезды выбрасывается из нее один раз с высокими скоростями порядка 1000 км/сек . Внешние слои такой оболочки будут диссипироваться в пространстве. Внутренние слои претерпевают большое отрицательное ускорение от давления излучения и теперь расширение туманностей происходит со сравнительно малыми скоростями (мы исключаем Крабовидную туманность). Эта гипотеза была обсуждена Занстра в последней статье, которую я получил при написании последнего параграфа настоящей работы. Однако Занстра пренебрег влиянием селективного давления излучения в линии L_α .

* Это предположение было выдвинуто проф. Милном в частном письме.

Мы видели, что роль этого давления будет очень велика и обсуждение динамики туманностей при учете селективного давления излучения представило бы некоторый интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Ambarzumian, MN, **93**, 50, 1932.
2. Milne, Z. f. Ap., **1**, 105, 1930.
3. Cillie, MN, **92**, 820, 1932.
4. Zanstra, Z. f. Ap., **2**, 337, 1931.
5. V. Ambarzumian, Цирк. Пулк. обс., № 6.

Примечание.—В настоящей работе впервые даны основы теории лучистого равновесия планетарных туманностей и выяснена большая роль светового давления в их динамике. Успех был достигнут благодаря введению метода разделения полей L_c - и L_a -излучения. В дальнейшем эта теория была развита в работах многих авторов. В результате было установлено, что при рассмотрении диффузии L_a -излучения необходимо принимать во внимание следующие два эффекта: 1) перераспределение излучения по частотам внутри линии, приводящее к уходу L_a -квантов из туманности в крыльях линии, 2) наличие градиента скорости в туманности, приводящее к уходу L_a -квантов из средних частей туманности вследствие эффекта Доплера. В работах, учитывающих указанные эффекты, получены гораздо более низкие значения для плотности L_a -излучения и для силы светового давления, вызванного этим излучением, чем в приведенной выше работе.